أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضيات	الأستاذ : عثماني نجيب مـذكـرة رقـم /12

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 12 في درس الجداء السلمي

القدرات المنتظرة

- التعبير و البرهنة على تعامد متجهتين
- التعبير متجهيا و تحليليا عن التعامد و خاصياته
- تحديد مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه
- تحديد المستقيم المار من نقطة والعمودي على مستوى
- تحديد معادلة ديكارتية لفلكة محددة بمركزها و شعاعها
- تحديد تمثيل باراميتري لفلكة
- التعرف على مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

محتوى الدرس

- الجداء السلمي في الفضاء و خاصياته:
- الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم
- المستوى المحدد بنقطة و متجهة منظميه عليه
- مسافة نقطة عن مستوى
- دراسة تحليلية للفلكة:
- دراسة مجموعة النقط بحيث: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$
- تقاطع فلكة و مستقيم:
- تقاطع فلكة و مستوى:
- معادلة ديكارتية لمستوى مماس لفلكة في نقطة معلومة:

I. الجداء السلمي في الفضاء و خاصياته:

1. تعريف:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, A و B و C ثلاث نقط من الفضاء بحيث: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ يوجد على الأقل مستوى (P) يمر من النقط A و B و C.

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ في المستوى (P), و نرمز له بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

ملحوظة: جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمدد إلى الفضاء.

نتائج: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, و A و B و C ثلاث نقط من الفضاء بحيث: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فان:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\times\cos B\hat{A}C$$
- إذا كانت $\vec{u}$ غير منعدمة فان. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$, حيث H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

ملحوظة:

- الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ يرمز له بالرمز $\vec{u}^2$, و يسمى المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$
- منظم المتجهة $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي الموجب: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

خاصية: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا, لدينا:

← **التماثلية:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

← **الخطانية:** $\left.\begin{array}{l}(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})\\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\end{array}\right\}$

2. تعامد متجهتين:

تعريف لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء. نقول إن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, و نكتب: $\vec{u}\perp\vec{v}$

مثال:

$ABCDEFGH$ مكعب

لدينا: $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان أي $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ (لأن (AE) عمودي على المستوى (ABC))

و بما أن $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$ فان $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ أي $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BF}$

II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

1) المعلم و الأساس المتعامدان الممنظمان:

تعريف: ليكن $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساسا في الفضاء و O من الفضاء

نقول إن $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان:

$\vec{i}\vec{j}=\vec{i}\vec{k}=\vec{j}\vec{k}=0$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$

نقول إن $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساسا متعامدا ممنظما

فيما تبقي من فقرات الدرس, ننسب الفضاء إلى معلم متعامد ممنظ

2) خاصية:

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ متجهتين من الفضاء فان: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

مثال: $\vec{u}(1;5;-1)$ و $\vec{u}(-5;1;0)$

هل المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{u}$ متعامدتين ؟

الجواب: نحسب الجداء السلمي :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-5)\times1+1\times5+0\times(-1)=(-5)+5=0$$

ومنه : $\vec{u}\perp\vec{v}$

3) منظم متجهة

خاصية: إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ فان منظم المتجهة $\vec{u}$ هو:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

مثال: $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$ أحسب : $\|\vec{u}\|$

الجواب: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$

4) المسافة بين نقطتين:

خاصية: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء

المسافة بين النقطتين A و B هي:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

تمرين1: $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ **معلم متعامد ممنظم مباشر للفضاء**

$\vec{u}(3;-2;1)$, $\vec{v}(2;1;0)$ ***احسب :*** $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

الجواب: $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}}=\frac{4}{\sqrt{70}}$

5) تحديد تحليلي لمجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$

خاصية: لتكن A نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة و k عددا حقيقيا

مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ هي مستوى معادلته تكتب على شكل $ax+by+cz+d=0$, حيث d عدد حقيقي

مثال: نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ و المتجهة $\vec{u}(2;1;-1)$

حدد (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$.

الجواب: لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

لدينا: $M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

$\Leftrightarrow 2(x-1)+(y+1)-(z-2)=-1$

$\Leftrightarrow 2x+y-z+2=0$. هذه المعادلة تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$

إذن المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته:

$2x+y-z+2=0$

III. المستوى المحدد بنقطة و متجهة منظمية عليه:

1) متجهة منظمية على مستوى:

تعريف: ليكن (P) مستوى في الفضاء.

نسمي متجهة منظمية على المستوى (P) كل متجهة $\vec{n}$ غير منعدمة يكون اتجاهها عموديا على المستوى (P).

نتيجة: المتجهة $\vec{n}$ منظمية على المستوى (P) إذا وفقط إذا كانت $\vec{n}$ متعامدة مع متجهتين للمستوى (P) .

2) خاصية: لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية بحيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $ax+by+cz+d=0$

هي مستوى و المتجهة $\vec{n}(a;b;c)$ متجهة منظمية عليه.

أمثلة : حدد متجهة منظمية على المستوى (P) في الحالات التالية :

1) $(P)\ 2x-3y+z+10=0$ 2) $(P)\ 3x-z+1=0$

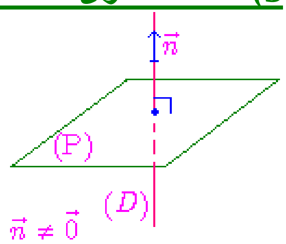
3) $(P)\ y+z+1=0$ 4) $(P)\ z=2$

5) $(P):x-2y+7z-3=0$ 6) $(P):2y-z+11=0$

أجوبة : 1) $\vec{n}(2;-3;1)$ 2) $\vec{n}(3;0;-1)$ 3) $\vec{n}(0;1;1)$

4) $\vec{n}(0;0;1)$ 5) $\vec{n}(1;-2;7)$ 6) $\vec{n}(0;2;-1)$

3) معادلة مستوى المحدد بنقطة و متجهة منظمية عليه:



خاصية: لتكن $\vec{n}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء.

المستوى (P) المار من النقطة A و متجهة منظمية عليه, هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

و معادلة ديكارتية له تكتب على شكل: $ax+by+cz+d=0$, حيث d عدد حقيقي.

مثال: نعتبر في الفضاء المتجهة $\vec{n}(1;2;1)$ و النقطتين $A(-1;0;2)$ و $B(3;1;0)$.

1)حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة A و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه.

2)حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة B و العمودي على المستوى (P).

3)حدد مثلوث إحداثيات النقطة B' المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P).

أجوبة : 1)تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (P) :

طريقة1: $M(x;y;z)\in(P)$ يعني $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

$\overrightarrow{AM}(x+1;y;z-2)$ يعني

$(x+1)\times1+y\times2+1\times(z-2)=0$

يعني $x+1+2y+z-2=0$ يعني $(P)\ x+2y+z-1=0$

طريقة2: نعلم أن معادلة مستوى تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$

و نعلم أن $\vec{n}(1;2;1)$ متجهة منظمية عليه اذن : $a=1$ و $b=1$ و $c=1$

ومنه : $(P)\ 1x+2y+1z+d=0$

و نعلم أن: $A(-1;0;2)\in(P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

يعني $(-1)+2\times0+1\times2+d=0$ يعني $d=-1$

وبالتالي : $(P)\ x+2y+z-1=0$

2) تحديد تمثيل بارامتري للمستقيم (D):

(D) يمر من النقطة B و عمودي على المستوى (P).

اذن : $\vec{n}(1;2;1)$ متجهة موجهة ل (D) و $B(3;1;0)\in(D)$

اذن: $\begin{cases}x=1k+3\\y=2k+1\\z=1k+0\end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{R}$ و هو تمثيل بارامتري للمستقيم (D)

3) B' هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P).

اذن : $B'\in(P)$ و $B'\in(D)$

ومنه نحل النظمة التالية : $\begin{cases}x+2y+z-1=0\\x=1k+3\\y=2k+1\\z=1k+0\end{cases}$

يعني $k+3+2(2k+1)+k-1=0$ يعني $6k+4=0$

يعني $k=-\frac{2}{3}$ ومنه: $\begin{cases}x=-\frac{2}{3}+3=\frac{7}{3}\\y=-\frac{4}{3}+1=-\frac{1}{3}\\z=-\frac{2}{3}+0\end{cases}$

ومنه : $B'\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

تمرين2: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المحدد ب $A(-5;2;-1)$ و $\vec{n}(2;1;-2)$ متجهة منظمية عليه

الجواب: نعتبر : $M(x;y;z)\in(P)$

$M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

$M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow2(x+5)+(y-2)-2(z+1)=0$

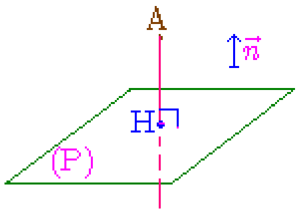
$M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow2x+y-2z+6=0$

و منه : $\boxed{(P):\ 2x+y-2z+6=0}$

IV. مسافة نقطة عن مستوى:

تعريف: ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء و H المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P).

المسافة AH تسمى مسافة النقطة A عن المستوى (P) , و يرمز لها بالرمز $d(A;(P))$.



خاصية: ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء.

مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي:

$$d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: نعتبر في الفضاء النقطة $A(5;1;0)$ و المستوى (P) الذي معادلته $x+2y+2z-6=0$

أحسب : $d(A;(P))$

الجواب: $d(A;(P))=\frac{|5+2\times1+2\times0-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|1|}{3}=\frac{1}{3}$

تمرين3: $(P):\ -3x+2y+z+2=0$

ليكن : $(D)\perp(P)$ و $B(-2;2;3)\in(D)$

1)احسب : $d(B;(P))$ 2)حدد تمثيلا بارامتريا ل (D)

أجوبة : 1) $d(B;(P))=\frac{|-3\times-2+2\times2+3+2|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{15}{\sqrt{14}}$

2)لدينا : $(P):\ -3x+2y+z+2=0$

إذن : $\vec{n}(-3;2;1)$ متجهة منظمية على (P)

و بما أن : $(D)\perp(P)$ فإن :

$\vec{n}(-3;2;1)$ متجهة موجهة ل (D)

و لدينا : $B(-2;2;3)\in(D)$

إذن : $\boxed{(D):\begin{cases} x=-3t-2 \\ y=2t+2 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t+3 \end{cases}}$

V. دراسة تحليلية للفلكة:

1)تعريف:

لتكن Ω نقطة من الفضاء و R عددا حقيقيا موجبا قطعا.

الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\Omega M=R$.

نرمز لهذه الفلكة بالرمز $S(\Omega;R)$

2)معادلة ديكارتية الفلكة محددة بمركزها و شعاعها:

خاصية: معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها R $(R\succ 0)$ هي:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

و تكتب أيضا: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ حيث:

$$d=a^2+b^2+c^2-R^2$$

مثال: حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) في الحالات التالية:

1) (S) مركزها $\Omega(1;2;-3)$ و شعاعها $R=4$.

2) (S) مركزها $\Omega(0;-1;1)$ و تمر من النقطة $A(1;2;-1)$

أجوبة : 1) (S) مركزها $\Omega(1;2;-3)$ و شعاعها $R=4$.

إذن : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4^2$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشر ها فنجد :

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+6z+9=16$$

يعني : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$

وهي تكتب على الشكل التالي : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

2) (S) مركزها $\Omega(0;-1;1)$ و تمر من النقطة $A(1;2;-1)$

يعني : $\Omega A=R$

نحسب المسافة ΩA :

$$R=\Omega A=\sqrt{(1-0)^2+(2+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

ومنه: معادلة ديكارتية للفلكةهي :

$$(x-0)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=\sqrt{14}^2$$

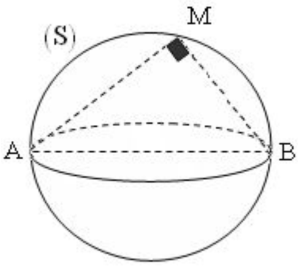
يعني: $(S)\ x^2+y^2+z^2+2y-2z-12=0$

خاصية: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$ و, معادلة ديكارتية لها هي:

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

حيث , $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$.



مثال: حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$

$A(1;0;-1)$ و $B(1;2;-1)$

الجواب: طريقة1

مركزها Ω هو منتصف القطعة $[AB]$

اذن: $\Omega\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ اذن: $\Omega(1;1;-1)$

ولدينا أيضا : $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(0)^2+(2)^2+(0)^2}}{2}=1$

ومنه: معادلة ديكارتية للفلكةهي :

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1^2$$

يعني: $(S)\ x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$

طريقة2: *نستعمل الخاصية:* $A(1;0;-1)$ و $B(1;2;-1)$

$M\in(S)$ يعني $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

لدينا $\overrightarrow{MA}(1-x;0-y;-1-z)$ و $\overrightarrow{MB}(1-x;2-y;-1-z)$

يعني $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ يعني

$$(1-x)\times(1-x)+-y(2-y)+(-1-z)(-1-z)=0$$

يعني $(1-x)^2+-y(2-y)+(-1-z)^2=0$

$$(S)\ x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$$

VI. دراسة مجموعة النقط بحيث:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

خاصية: لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية بحيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ و S مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

- تكون (S) فلكة إذا وفقط إذا كان: $a^2+b^2+c^2-4d>0$

مركز هذه الفلكة هو النقطة $\Omega\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2};-\dfrac{c}{2}\right)$ و شعاعها هو:

$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$$

- إذا كان $a^2+b^2+c^2-4d<0$ فان (S) هي المجموعة الفارغة.

- إذا كان $a^2+b^2+c^2-4d=0$ فإن (S) هي

$$(S)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)\right\}$$

أمثلة : حدد مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلات التالية:

1) $(E_1): x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z+6=0$

2) $(E_2): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+6=0$

3) $(E_3): x^2+y^2+z^2-x+3y+2z+\frac{9}{2}=0$

أجوبة : 1) $(E_1): x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z+6=0$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا: $a=-6$ و $b=4$ و $c=-6$ و $d=6$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

$a^2+b^2+c^2-4d=36+16+36-24=64>0$

ومنه : (E_1) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي : $\Omega(3;-2;3)$

و شعاعها هو : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ أي : $R=\frac{\sqrt{64}}{2}=\frac{8}{2}=4$

2) $(E_2): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+6=0$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا: $a=-4$ و $b=2$ و $c=2$ و $d=6$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

$a^2+b^2+c^2-4d=16+4+4-24=0$

ومنه : (E_2) هي النقطة $(E_2)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)\right\}$ أي

$(E_2)=\{\Omega(2;-1;-1)\}$

3) $(E_3): x^2+y^2+z^2-x+3y+2z+\frac{9}{2}=0$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا: $a=-1$ و $b=3$ و $c=2$ و $d=\frac{9}{2}$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

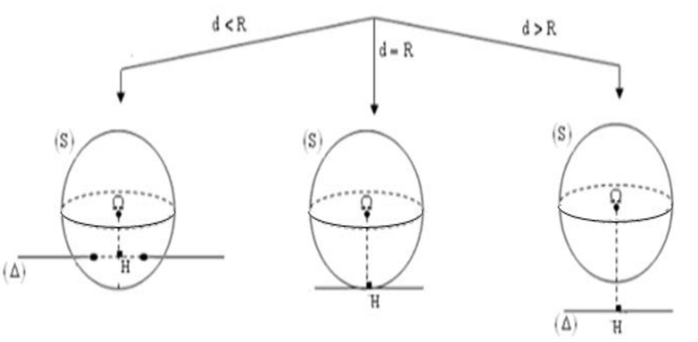
$a^2+b^2+c^2-4d=1+9+4-18=-4<0$

ومنه : (E_3) هي المجموعة الفارغة.

VII. تقاطع فلكة و مستقيم:

(S) فلكة و (D) مستقيم

(S) و (D) يكونان إما منفصلين أو متقاطعين في نقطة أو في نقطتين



ليكن (D) مستقيما من الفضاء معرفا بتمثيل بارامتري, و (S) فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية, لندرس ثلاث أمثلة نحدد من خلالها الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S).

مثال 1: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5=0$$

و (D) المستقيم المار من $A(0;5;1)$ و $\vec{n}(2;1;-2)$ متجهة موجهة له

1) حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (D)

2) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

الجواب: 1) تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x=2t \\ y=5+t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1-2t \end{cases}$$

2) نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5=0 \\ x=2t \\ y=5+t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1-2t \end{cases}$$

$$(2t)^2+(5+t)^2+(1-2t)^2+6\times2t-4(5+t)-2(1-2t)+5=0$$

$9t^2+18t+9=0$ يعني $t^2+2t+1=0$

لدينا: $\Delta=0$ اذن للمعادلة حل حقيقي مزدوج $t=\frac{-b}{2a}=-1$

نعوض t بـ -1 في التمثيل البارامتري لـ (D)

فنجد : $\begin{cases} x=-2 \\ y=4; \\ z=3 \end{cases}$ ومنه هناك نقطة وحيدة مشتركة بين (S) و (D) هي: $T(-2;4;3)$

في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) نقطة وحيدة مشتركة هي T

نقول إن المستقيم (D) **مماس للفلكة** (S) **في النقطة** T.

مثال 2: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$ و (D) المستقيم المعرف بما يلي: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-1+t \end{cases}$ أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

الجواب :

نحل النظمة التالية : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0 \\ x=-1+2t \\ y=2-2t \\ z=-1+t \end{cases}$

$(-1+2t)^2+(2-2t)^2+(-1+t)^2-4\times(-1+2t)-2(2-2t)-1=0$

$9t^2-18t+5=0$ لدينا: $\Delta=18^2-4\times9\times5=324-180=144=12^2$

اذن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما: $t_1=\frac{1}{3}$ و $t_2=\frac{5}{3}$

نعوض t ب $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{3}$ في التمثيل البارامتري ل (D) فنجد نقطتين:

هما : $A\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{4}{3}; \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases}$ و $B\begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=-\frac{4}{3}; \\ z=\frac{2}{3} \end{cases}$

و $A\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$ $B\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) لهما نقطتان مشتركتان هما A و B, نقول:

إن **المستقيم** (D) **قاطع للفلكة** (S).

مثال 3: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0$ و (D) المستقيم المعرف بما يلي: $\begin{cases} x=0 \\ y=t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$ أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

الجواب :

نحل النظمة التالية : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0 \\ x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

$0^2+t^2+t^2-2\times0+4t-2t+4=0$

$2t^2+2t+4=0$ يعني $t^2+t+2=0$ لدينا: $\Delta=1^2-4\times2=-7<0$

اذن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

ومنه المستقيم (D) يوجد خارج الفلكة (S). يعني : $(S)\cap(D)=\varnothing$

تمرين 4: $A(1;1;-2)$ و $\vec{u}(-3;2;1)$

$(S):\ x^2+y^2+z^2=6$

ادرس تقاطع المستقيم : $D(A;\vec{u})$ و (S)

الجواب : $M(x;y;z)\in(D)\cap(S)$

نبحث عن : تمثيل بارامتري ل (D):

يعني : $M(x;y;z)\in(S)$ و $\begin{cases} x=1-3t \\ y=1+2t \\ z=-2+t \end{cases}$

إذن: $(1-3t)^2+(1+2t)^2+(-2+t)^2=6$

يعني : $14t^2-6t+6=6$ **يعني :** $14t^2-6t=0$

يعني : $t(7t-3)=0$ **يعني :** $t=0$ **أو** $t=\frac{3}{7}$

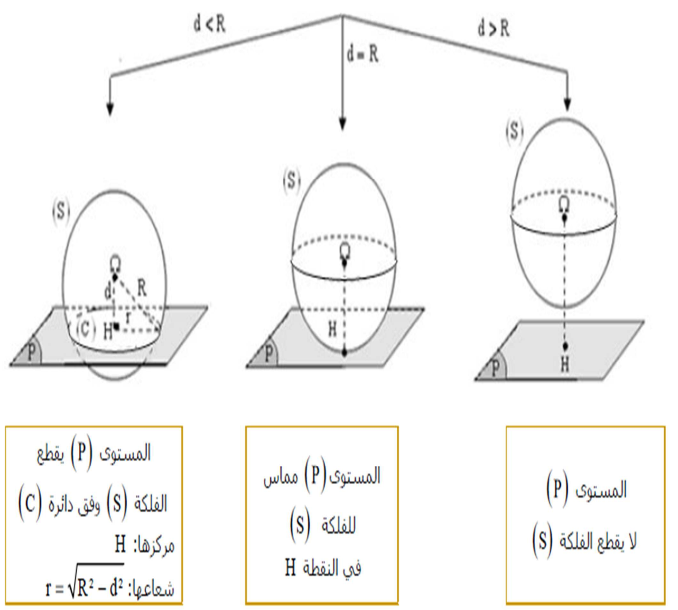
ومنه : $M(1;1;-2)$; $M\left(\frac{-2}{7};\frac{13}{7};\frac{-13}{7}\right)$

إذن : $(D)\cap(S)=\left\{A(1;1;-2)\ ;\ B\left(\frac{-2}{7};\frac{13}{7};\frac{-13}{7}\right)\right\}$

VIII. تقاطع فلكة و مستوى:

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

نضع: $d=\Omega H=d(\Omega;(P))$



لتكن (S) فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية, و (P) مستوى من الفضاء معرفا بمعادلة ديكارتية, لندرس ثلاث أمثلة نستنتج من خلالها الوضع النسبي للمستوى (P) و الفلكة (S).

مثال 1: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ و المستوى (P) المعرف بالمعادلة: $2x+y+2z-3=0$

1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

2) أحسب: $d(\Omega;(P))$ وتأكد أن (P) يقطع الفلكة في نقطة وحيدة T

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P)

4) استنتج احداثيات T نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (P)

أجوبة : 1) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$

على الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا: $a=2$ و $b=-2$ و $c=2$ و $d=-1$

نحسب: $a^2+b^2+c^2-4d$

$a^2+b^2+c^2-4d=4+4+4+4=16>0$

ومنه: (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي: $\Omega(-1;1;-1)$

و شعاعها هو: $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ أي: $R=\frac{\sqrt{16}}{2}=\frac{4}{2}=2$

2) $2x+y+2z-3=0$ و $\Omega(-1;1;-1)$

$$d(\Omega;(P))=\frac{|2\times(-1)+1+2\times(-1)-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|6|}{3}=\frac{6}{3}=2=R$$

ومنه: (P) يقطع الفلكة في نقطة وحيدة T

نقول (P) مماس للفلكة (S) في T

3) (Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن: $\vec{n}(2;1;2)$ **متجهة منظمة على** (P)

اذن تمثيل بارامتري ل (Δ) هو: $(\Delta)\begin{cases}x=2t-1\\y=1t+1;(t\in\mathbb{R})\\z=2t-1\end{cases}$

4) $T(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

$\begin{cases}x=2t-1\\y=1t+1;(t\in\mathbb{R})\\z=2t-1\end{cases}$ و (P) $2x+y+2z-3=0$

اذن: $2(2t-1)+(t+1)+2(2t-1)-3=0$

يعني $9t-6=0$ يعني $t=\frac{2}{3}$ وبالتعويض في التمثيل البارامتري نجد

$\begin{cases}x=2\times\frac{2}{3}-1\\y=1\times\frac{2}{3}+1;(t\in\mathbb{R})\\z=2\times\frac{2}{3}-1\end{cases}$ ومنه: $T\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$ **نقطة التماس**

مثال 2: لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(2;0;1)$ شعاعها $R=3$ والمستوى (P) المعرف بالمعادلة: $x-2y+z+3=0$

1) حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S)

2) أحسب: $d(\Omega;(P))$ وتأكد أن (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C) يتم تحديد شعاعها r

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P)

4) استنتج احداثيات H مركز الدائرة (C)

أجوبة : 1) اذن: $(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3^2$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد:

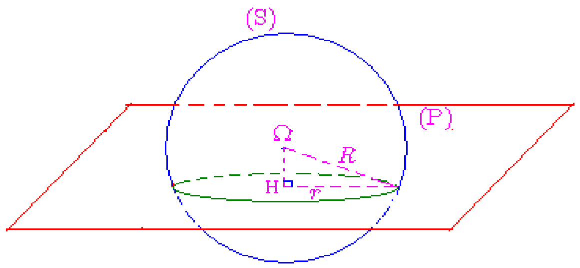
$x^2-4x+4+y^2+z^2-2z+1=9$

يعني: $x^2+y^2+z^2-4x-2z-4=0$

2) $x-2y+z+3=0$ و $\Omega(2;0;1)$

$$d(\Omega;(P))=\frac{|2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}<R=3$$

ومنه: (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C)



نلاحظ أننا نحصل على مثلث قائم الزاوية في H

ومنه حسب فيتاغورس فان: $r=\sqrt{R^2-d^2}$

$r=\sqrt{3^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$

3) $x-2y+z+3=0$ (P) و $\Omega(2;0;1)$

(Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن: $\vec{n}(1;-2;1)$ **متجهة منظمة على** (P)

اذن تمثيل بارامتري ل (Δ) هو: $(\Delta)\begin{cases}x=1t+2\\y=-2t;(t\in\mathbb{R})\\z=1t+1\end{cases}$

4) $H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

$(\Delta)\begin{cases}x=1t+2\\y=-2t;(t\in\mathbb{R})\\z=1t+1\end{cases}$ و (P) $x-2y+z+3=0$

اذن: $(t+2)-2(-2t)+(t+1)+3=0$

يعني $6t+6=0$ يعني $t=-1$ وبالتعويض في التمثيل البارامتري نجد

ومنه: $\begin{cases} x=-1+2 \\ y=-2(-1) \\ z=-1+1 \end{cases}$: $H(1;2;0)$ **مركز** الدائرة (C)

مثال 3: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها هي:

$x^2+y^2+z^2-2x=0$, و المستوى (P)

الذي معادلته الديكارتية هي: $x+y-z+2=0$

1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

2) أحسب: $d(\Omega;(P))$ ماذا تستنتج ؟

أجوبة: 1) $x^2+y^2+z^2-2x=0$

على الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا: $a=-2$ و $b=0$ و $c=0$ و $d=0$

نحسب: $a^2+b^2+c^2-4d$

$a^2+b^2+c^2-4d=4>0$

ومنه: (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي: $\Omega(1;0;0)$

و شعاعها هو: $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ أي: $R=\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

2) $x+y-z+2=0$ و $\Omega(1;0;0)$

$$d(\Omega;(P))=\frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}>R=1$$

ومنه: (P) يوجد خارج الفلكة (S) أو لا يقطع الفلكة

تمرين5: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها الديكارتية هي:

$(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z=5$

والمستوى (P) المعرف ب $(P): 2x-2y+z+3=0$

1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

2) بين أن (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C) يتم تحديد شعاعها r

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P)

4) استنتج احداثيات H مركز الدائرة (C)

أجوبة: 1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z=5$

على الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا: $a=-2$ و $b=6$ و $c=2$ و $d=-5$

نحسب: $a^2+b^2+c^2-4d$

$a^2+b^2+c^2-4d=64>0$

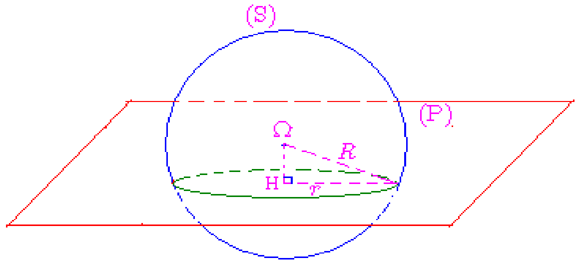
ومنه: (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي: $\Omega(1;-3;-1)$

و شعاعها هو: $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ أي: $R=\frac{\sqrt{64}}{2}=\frac{8}{2}=4$

2) $(P): 2x-2y+z+3=0$ و $\Omega(1;-3;-1)$

$$d(\Omega;(P))=\frac{|2+6-1+3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|10|}{3}=\frac{10}{3}<R=4$$

ومنه: (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C)



$$r=\sqrt{4^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{16-\frac{100}{9}}=\sqrt{\frac{44}{9}}=\frac{\sqrt{44}}{3}=\frac{2\sqrt{11}}{3}$$

3) $(P): 2x-2y+z+3=0$ و $\Omega(1;-3;-1)$

(Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن: $\vec{n}(2;-2;1)$ **متجهة منظمة على** (P)

اذن تمثيل بارامتري ل (Δ) هو: $(\Delta)\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t-3;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1t-1 \end{cases}$

4) $H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

$(\Delta)\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t-3 \\ z=1t-1 \end{cases}$ و $(P): 2x-2y+z+3=0$

اذن: $2(2t+1)-2(-2t-3)+(t-1)+3=0$

يعني $9t+10=0$ يعني $t=-\frac{10}{9}$ وبالتعويض في التمثيل البارامتري نجد

ومنه: $\begin{cases} x=-\frac{11}{9} \\ y=-\frac{7}{9} \\ z=-\frac{19}{9} \end{cases}$: $H\left(-\frac{11}{9};-\frac{7}{9};-\frac{19}{9}\right)$ **مركز** الدائرة (C)

خاصية: يكون مستوى (P) مماسا للفلكة $S(\Omega;R)$ إذا وفقط إذا كان $d(\Omega;(P))=R$.

IX. معادلة ديكارتية لمستوى مماس لفلكة في نقطة معلومة:

خاصية: لتكن (S) فلكة مركزها Ω و A نقطة من الفلكة (S) يوجد مستوى وحيد (P) مماس للفلكة (S) عند النقطة A, و هو المستوى العمودي على المستقيم $(A\Omega)$ في النقطة A , أي $M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$.

مثال:

$S(\Omega;R):\ x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z=5$

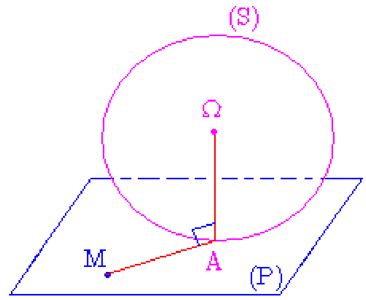
1) بين أن : $A(2;-1;0)\in(S)$

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) **المماس ل** (S) **في** A

الجواب :

1) نعوض باحداثيات في معادلة الفلكة ونجد أنها تحقق المعادلة

$(S):\ 2^2+(-1)^2+0^2+2\times2+4\times(-1)-6\times0=5$



2) $S(\Omega;R):\ x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z=5$

نحدد مركز الفلكة : $a=2$ و $b=4$ و $c=-6$

ومنه : (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي : $\Omega(-1;-2;3)$

لتكن : $M(x;y;z)$ $\qquad A(2;-1;0)$

$M(x;y;z)\in(P)$ يعني $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\overrightarrow{AM}(x-2;y+1;z)$ و $\overrightarrow{A\Omega}(-3;-1;3)$

يعني $-3(x-2)-(y+1)+3z=0$

يعني $(P)\ -3x-y+3z+5=0$

تمرين6: نعتبرالفلكة (S) **التى مركزها** $A(2;-1;1)$ **و شعاعها6**

1) بين أن : $B(-2;3;-1)\in(S)$

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس ل (S) في B